# Формулы Фейнмана и интегралы по траекториям в рамках p-адического анализа

**О. Г. Смолянов**.
*Кафедра теории функций и функционального анализа,*
*Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова,*
*Россия*
smolyanov@yandex.ru

**Н. Н. Шамаров**.
*Институт теоретических проблем физики микромира им.Н.Н.Боголюбова,*
*Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова,*
*Россия*
nshamarov@gmail.ru

Ключевые слова по разделам доклада:
линейные псевдодифференциальные операторы,
формулы Фейнмана,
интегралы по траекториям
и формулы Фейнмана-Каца
(в представлениях решений линейных эволюционных уравнений

$$\Psi'(t) = \widehat{H}\,\Psi(t)\ , \qquad t > 0$$

над вещественным и $\mathfrak{p}$-адическим полями.)

# 1 ПДО на локально компактных абелевых топологических группах

Если

$Q = \{q\}$ — локально компактная абелева топологическая группа (каковы аддитивные группы конечномерных пространств $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}^d$ ($d \in \mathbb{N}$), торы, решётки $Z^d$, и т.п.) [пространство конфигураций],

$P = \{p\}$ — её группа характеров (предполагаемых аддитивными, унитарными и непрерывными) [пространство импульсов],

$dq$ и $dp$ — некоторые меры Хаара,

рассматриваемые как заданные на борелевских сигма-алгебрах $B(Q)$ и $B(P)$ соответственно,

согласованные так (как обычно подбирается в гармоническом анализе), что так называемые прямое и преобразования Фурье

$(F\psi)(p) = \widetilde{\psi(q)dq}$, $\widetilde{\nu}(p) = \int_Q p(-q)\nu(dq)$ для $\psi : Q \to \mathbb{C}$ и $\nu : B(Q) \to \mathbb{C}$

$(F^{-1}\varphi)(q) = \widehat{\varphi(p)dp}$, $\widehat{\mu}(p) = \int_P p(q)\mu(dp)$ для $\varphi : P \to \mathbb{C}$ и $\mu : B(P) \to \mathbb{C}$

унитарны относительно $L_2$-структур,

то естественно называть

*псевдодифференциальным оператором*

с ($qp$-) символом $H : Q \times P \to \mathbb{C}$

в подходящем пространстве комплекснозначных функций на $Q$

линейный оператор, определяемый формулой

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 = F^{-1,p\to q} \circ (H(q,p)\cdot) \circ F^{q\to p} :$$
$$\psi(q) \mapsto F^{-1,p\to q}\left(H(q,p) \cdot F^{q'\to p}\,\psi(q')\right)$$

или, в интегральном виде,

$$(\widehat{H}_0\psi)(q) = \int_P p(q) \cdot H(q,p) \cdot \left(\int_Q p(-q')\varphi(q')\,dq'\right)\,dp =$$
$$= \int_{Q\times P} p(q-q') \cdot H(q,p) \cdot \psi(q')\,dq'\,dp \qquad (qp)$$

для $Q = \mathbb{R}^d \equiv P \equiv Q'$ : $p(q-q')dq'dp \to e^{2\pi i(p,q-q')}dq'dp$,

для $Q = \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}} \equiv P$ : $\quad p(q-q')dq'dp \to \chi_{\mathfrak{p}}(p\cdot(q-q'))dq'dp$ .

Аналогично определяется ПДО с $pq$-символом $H$ :

$\widehat{H}_1 = F^{-1,p\to q} \circ F^{q\to p} \circ (H(q,p)\cdot) : \qquad \psi \mapsto \widehat{H}_1\psi$, где

$$(\widehat{H}_1\psi)(q) = \int\limits_{Q\times P} p(q-q') \cdot H(q',p) \cdot \psi(q')\,dq'\,dp\ . \qquad (pq)$$

Разница между $qp$- и $pq$-символами — только в штрихе в аргументе $H$.

Если группа $Q$ обладает однозначным делением пополам, можно ввести так называемый

ПДО с символом Вейля $H$ : $\qquad \psi \mapsto \widehat{H}_{\frac{1}{2}}\varphi$ , где

$$(\widehat{H}_{\frac{1}{2}}\varphi)(q) = \int\limits_{Q\times P} p(q-q')\cdot H(\frac{q}{2}+\frac{q'}{2}\,,\,p)\cdot\psi(q')\,dq'\,dp$$

Наконец, для важных случаев, когда "конфигурационное" пространство $Q$ является модулем над полем рациональных чисел или его расширениями ($Q=\mathbb{R}^d$ или $Q=\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}^d$), можно ввести так называемый

ПДО с $\tau$-символом $H$ : $\qquad \psi \mapsto \widehat{H}_\tau\varphi$ , где

$$(\widehat{H}\psi)(q) = \int\limits_{Q\times P} p(q'-q)\cdot H(\tau q+(1-\tau)q'\,,\,p)\cdot\psi(q')\,dq'\,dp$$

где $\tau$ — элемент из $Q$ или подходящего расширения, так что
при $\tau=0$ функция $H$ является $qp$-символом,
при $\tau=1$ — pq-символом,
и при $\tau=1/2$ — символом Вейля

для соответствующего оператора $\widehat{H}_\tau$ .

Конечно, если функция $H$ не зависит явно от "координат" $q$, (важные случаи — символ оператора Лапласа на евклидовом пространстве, символ оператора Лапласа-Бельтрами на торе, символ оператора Владимирова и, наконец, символ $\widetilde{\mu}(p)$ оператора свёртки с мерой $\mu : B(Q)\to\mathbb{C}$), то определение ПДО с $\tau$-символом $H$ не зависит от $\tau$ .

## 2 Линейные эволюционные уравнения и формулы Фейнмана

Далее в основном рассматриваются уравнения вида

$$\Psi'(t) = \widehat{H}(\Psi(t)) \tag{Evol}$$

где функция $\Psi$ определена на отрезке $[0, T]$ вещественной прямой (интерпретируемой как ось времени) и принимает значения в некотором пространстве функций на конфигурационном пространстве $Q$,
включающие не зависящий явно от времени ПДО $\widehat{H}$ с (обычным, или $qp$-) символом $H : Q \times P \to \mathbb{C}$ вида $H(q,p) = h(p) + v(q)$ .

Следуя классическим обозначениям, иногда будем писать
$\psi(t,q)$ вместо $(\Psi(t))(q)$ , а также и $\psi_0(q)$ вместо нач.усл. $\psi(0,q)$.

Чтобы показать, как техника так называемых обобщенных пуассоновских мер на пространствах траекторий работает в общем случае локально компактной абелевой группы, мы будем предполагать, что в этом случае $h = \widetilde{\nu}$ и $v = \widehat{\mu}$ для некоторых комплексно-значных счетноаддитивных мер $\nu : B(Q) \to \mathbb{C}$ и $\mu : B(P) \to \mathbb{C}$ (при этом, заменяя обычный функциональный интеграл по счетно аддитивной мере на хронологический, можно учесть замену комплексного поля значений и на бесконечномерную некоммутативную алгебру над $\mathbb{C}$ ).

В случае конкретных классических уравнений — с операторами типа Шредингера и Дирака (над $\mathbb{R}$) и операторами Владимирова (над $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$) "кинетический член" $h(\cdot)$ не является преобразованием Фурье счетно аддитивной меры, но упомянутая техника частично продолжает работать.

## 2.1 Формулы Фейнмана

Формулами Фейнмана называются представления решений задач Коши для эволюционных псевдодифференциальных уравнений типа

$\Psi'(t) = \widehat{H}(\Psi(t))$ (Evol)

в виде пределов конечно-кратных интегралов.

Один из наиболее общих способов получения таких формул состоит в обосновании равенства $(\Psi(t) \equiv) \quad \exp(t\widehat{H}_\tau)\psi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{(e^{tH/n})_\tau}^{\,n} \psi_0$ .

Вообще говоря, $\exp(t\widehat{H}_\tau) \neq \widehat{(e^{tH})}_\tau$ ни при каком $\tau$ — этот факт вынуждает использовать переход к пределу. Отметим, что, в отличие от формул типа Фейнмана-Каца с их функциональным интегралом, в формулах Фейнмана не используется явным образом никакая мера на пространстве траекторий в $Q$. Обоснование таких равенств часто сводится к проверке условий теорем типа Чернова “о произведениях”:

**Теорема**. Если для функции $F$, определенной на отрезке $[0, T]$ вещественной прямой и принимающей значения в пространстве ограниченных операторов в вещественном или комплексном банаховом пространстве $N$, выполнены условия: $F(0) = 1$ ; $\exists\, a > 0\ \forall\, t \in [0, T] \quad |F(t)| \leqslant e^{at}$ ; линейное подпространство $L = \{x \in N : \exists \lim_{s\to 0} s^{-1}(F(s)x - x) =: F'(0)x\}$ плотно и замыкание линейного оператора $F'(0)$ совпадает с генератором $G = S'(0)$ некоторой сильно непрерывной полугруппы $S(t) \equiv e^{tG}$, то для каждого вектора $x \in N$ справедлива *формула Чернова* :

$$e^{tG}x = \lim_{n\to\infty} (F(t/n))^n x \quad \square$$

Далее, если обоснованно равенство вида $\exp(t\widehat{H}_\tau)\psi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{(e^{tH/n})_\tau}^{\,n} \psi_0$ или, более общо, вида $\exp(t\widehat{H}_\tau)\psi_0 = \lim_{n\to\infty}(F(t/n))^n\psi_0$ для некоторой легко исследуемой функции $F$ неотрицательного вещественного аргумента со значениями в пространстве интегральных операторов, то можно попробовать интерпретировать допредельные конечнократные интегралы как интегралы, аппроксимирующие интегралы по траекториям. Если это удается, то доказательство формул Фейнмана приводит к получению представлений решений уравнений функциональными интегралами, и эти *представления* называются формулами Фейнмана-Каца.

## 3 Пуассоновские и другие интегралы по траекториям

Пусть $Q$ — полная метризуемая абелева локально компактная группа (например, $\mathbb{R}^d$ или $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}^d$), и $\widehat{H}$ — ограниченный в пространстве $C_0(Q)$ непрерывных стремящихся к нулю на бесконечности комплекснозначных функций ПДО с $qp$-символом $H(q,p) = \widetilde{\nu}(p) + \widehat{\mu}(q)$ , где $\mu$ и $\nu$ счетно аддитивны и комплексны. Положим $v = \widehat{\mu}$ . Оператор $\widehat{H}$ тогда имеет вид суммы ограниченных *не коммутирующих* операторов: $\nu *\ : \psi_0 \to (\nu * \psi_0)$ (оператор свёртки) и $v\cdot\ : \psi_0 \to (v \cdot \psi_0)$ . Экспоненты от обоих слагаемых имеют "явный" вид: $\exp(tv\cdot) = (e^{tv})\cdot$ и $\exp(t\nu *) = (e^{*(t\nu)})*$ , где свёрточная экспонента от меры определяется обычным рядом $\exp^*(t\nu) = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\nu^{*k}$ содержащим свёрточные степени $\nu^{*1} = \nu$ и $\nu^{*(k+1)} = \nu * (\nu^{*k})$ ($\delta_0(A) = 1$, если $A \ni 0$, и $= 0$ иначе) . Тогда, положив $F(t) = e^{tv\cdot}e^{t\nu *}$ , немедленно получаем формулу Фейнмана $\exp(t\widehat{H})\psi_0 = \lim_{n\to\infty}(F(t/n))^n\psi_0$ как следствие теоремы Чернова или более известной теоремы Троттера–Ли. Более того, в данном случае мы действительно можем интерпретировать конечнократный интеграл $(((F(t/n))^n)\psi_0)(q)$ как аппроксимирующий функциональный интеграл вида

$$\int e^{\int_0^t v(q+x(t))dt}\psi_0(q + x(0))M^{\nu,t}(dx) \qquad (FKQ)$$

по комплексной счетно аддитивной (цилиндрической) мере $M^{\nu,t}$ на пространстве кусочно постоянных непрерывных справа траекторий $x : [0,t) \to Q$ с конечным числом точек разрыва, таких что $x(0) = 0$ ; эта мера задается, аналогично однородному марк. процессу с независимыми приращениями, переходными мерами вида $m(t,x,A) = e^{*t\nu}(A - x)$ .

Формула Фейнмана-Каца (FKQ) называется интегралом по траекториям в конфигурационном пространстве системы с классической функцией Гамильтона $H = \widetilde{\nu}(p) + v(q)$ . Если начальное условие из $C_0(Q)$ , то она справедлива и в случае произвольной непрерывной ограниченной $v$ , и ещё в случае произвольной неограниченной непрерывной $v$ с чисто мнимыми значениями.

Если вернемся к более симметричному случаю $H(q,p) = \widetilde{\nu}(p) + \widehat{\mu}(q)$, то решение, при начальном условии $\psi_0 \in C_0(Q) \cap L_1(Q)$ , можно записать (переходя к преобразованиям Фурье) и в виде формулы Фейнмана-Каца с интегралом по траекториям в пространстве импульсов:

$$\psi(t,q) = F^{-1,p\to q}\int e^{\int_0^t \widetilde{\nu}(p+y(t))dt}(F\psi_0)(p + y(0))M^{\mu-,t}(dy). \qquad (FKP)$$

Наконец, рассмотрим процесс получения формулы Фейнмана–Каца с интегралом по траекториям в т.н. "фазовом пространстве" $\Phi = Q \times P$ при тех же ограничениях, что и для получения $FKP$ .

Используем ранее написанную формулу $\exp(t\widehat{H})\psi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{(e^{tH/n})}^n \psi_0$ $(\tau = 0)$, и явный вид функции Гамильтона. Получаем:

$$\psi(t,q) = \int e^{2\pi i \int_0^t (y(t), dx(t))} \psi_0(q + x(t)) M^{\nu\times\delta+\delta\times\mu,t}$$

для случая вещественного $Q = \mathbb{R}^d$ и

$$\psi(t,q) = \int e^{2\pi i \{\int_0^t y(t) dx(t)\}} \psi_0(q + x(t)) M^{\nu\times\delta+\delta\times\mu,t}$$

для случая $Q = \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}^d$ .

Последние 2 представления позволяют определить симплектическую меру Фейнмана, которая, в свою очередь, может быть использована для определения преобразования Фурье в бесконечномерном пространстве, а значит, и для определения бесконечномерных ПДО, что актуально с точки зрения теории суперструн, в том числе $\mathfrak{p}$-адических.